

**Đáp án Toán kinh tế 2 (ĐẠI TRÀ), HK2, NH 24-25**  
**Câu 1:a)** Vì phân toàn phần 2 về ta được

$$(2z - x)dz + (-z - 3)dx + (2y - 2)dy = 0 \quad (0.5)$$

Suy ra

$$dz = \frac{z+3}{2z-x}dx + \frac{2-2y}{2z-x}dy \quad (0.25)$$

Nếu SV tìm các đạo hàm riêng rồi mới viết vi phân thì vi phân 2 về được 0.25, mỗi cái đạo hàm riêng được 0.25

b) Với  $x = 2, y = 3$  thay vào hàm ẩn ta được

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

Suy ra  $z = 3, z = -1$  (loại vì  $z \geq 0$ ). (0.25)

Từ đó

$$dz(2, 3) = 3/2dx - dy \quad (0.25)$$

Với  $dx = 0, 2, dy = -0, 1$  ta được  $dz = 0.4$

Vậy đầu ra  $z$  tăng khoảng 0,4 khi  $x$  tăng 0,2 đơn vị từ  $x = 2$  và  $y$  giảm 0,1 đơn vị từ  $y = 3$ . (0.25)  
(chỉ cần SV tính đc  $dz=0,4$  là cho điểm)

**Câu 2.** Hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^4(y + b) + \lambda(Y - p_1x - p_2y) \quad (0.25)$$

Điều kiện bậc 1

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 4x^3(y + b) - \lambda p_1 = 0 \\ \mathcal{L}_y = x^4 - \lambda p_2 = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = Y - p_1x - p_2y = 0 \end{cases} \quad (0.5)$$
$$\begin{cases} 4x^3(y + b) = \lambda p_1 & (1) \\ x^4 = \lambda p_2 & (2) \\ Y = p_1x + p_2y & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) ta được  $\frac{4(y+b)}{x} = \frac{p_1}{p_2}$  (0.25).

Thiếu dấu bằng 0 hoặc không chuyển về mà chia thì trừ 0.25 điểm

Suy ra  $x = \frac{4p_2}{p_1}(y + b)$  (4). Thay vào (3) ta được

$$Y = p_1 \cdot \frac{4p_2}{p_1}(y + b) + p_2y$$

Suy ra

$$y = \frac{Y - 4p_2b}{5p_2} \equiv y^* \quad (0.25)$$

Thay vào (4) ta được

$$x = \frac{4(Y + p_2b)}{5p_1} \equiv x^* \quad (0.25)$$

Từ đó

$$U^*(p_1, p_2, Y) = U(x^*, y^*) = \left[ \frac{4(Y + p_2b)}{5p_1} \right]^4 \left[ \frac{Y + p_2b}{5p_2} \right] \quad (0.25).$$

b) Áp dụng định lý bao ta có

$$\frac{\partial U^*}{\partial Y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y}(x^*, y^*, \lambda^*) \quad (0.25)$$

$$= \lambda^* = \frac{1}{p_2} \left[ \frac{4(Y + p_2 b)}{5p_1} \right]^4 > 0 \quad (do \quad (2)) \quad (0.25)$$

Do đó  $U^*$  là một hàm tăng theo  $Y$  khi giá được giữ cố định. (0.25)

**Câu 3.** a. Ta có

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{2x}{(x+1)^3} dx \quad (0.25)$$

Đặt  $t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1$  và  $dx = dt$ . Mặt khác,  $x = 0 \Rightarrow t = 1, x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$  (0.25)

Từ đó

$$E(X) = \int_1^{\infty} \frac{2(t-1)}{t^3} dt = 2 \int_1^{\infty} (t^{-2} - t^{-3}) dt \quad (0.25)$$

$$= 2 \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^{\infty} \quad (0.25)$$

$$= 2(0 - (-1 + 1/2)) = 1 \quad (0.5)$$

Có nhiều cách tìm nguyên hàm, tìm đúng nguyên hàm cho 0.75 điểm.

b. Hàm doanh thu

$$R(q) = \int R'(q) dq = \int (10q - 3q^2 + 4q^3) dq \quad (0.25)$$

$$= 5q^2 - q^3 + q^4 + C \quad (0.25)$$

Ta lại có  $R(10) = 30000 \Rightarrow C = 20500$ .

Do đó

$$R(q) = 5q^2 - q^3 + q^4 + 20500. \quad (0.25)$$

(chỉ cần tìm ra  $C$  là cho điểm)

Vậy doanh thu khi sx 40 đơn vị sp là

$$R(40) = 2524500 \quad (0.25).$$

**Câu 4.** a. Ta có

$$\frac{dp}{dt} = 0,1(100 - 2p - 20 - p) = 0,1(80 - 3p) \quad (0.25)$$

Hay

$$\frac{dp}{dt} + 0,3p = 8$$

Thừa số tích phân  $I = e^{\int 0,3 dt} = e^{0,3t}$  (0.25).

Đặt

$$J = \int e^{0,3t} 8 dt = \frac{80}{3} e^{0,3t} + C \quad (0.25)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình  $P(t) = \frac{80}{3} + Ce^{-0,3t}$  (0.25)

Vì  $p(0) = 50 \Rightarrow C = \frac{70}{3}$  (0.25)

suy ra

$$p(t) = \frac{80}{3} + \frac{70}{3} e^{-0,3t}$$

(Nếu SV làm theo cách trong giáo trình thì cứ cho ra nghiệm là 1.25 điểm)

Do đó  $p(6) = \frac{80}{3} + \frac{70}{3} e^{-1,8} \simeq 30,524$  (0.25)

b.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{80}{3} + \frac{70}{3} e^{-0,3t} = \frac{80}{3}. \quad (0.5)$$

**Câu 5.** a. Ta có

$$Y_t = 550 + \frac{10}{8}Y_{t-1} - \frac{3}{8}Y_{t-2} \quad (0.25)$$

Giá trị cân bằng

$$Y^* = \frac{550}{1 - 10/8 + 3/8} = 4400 \quad (0.25)$$

Phương trình đặc trưng

$$r^2 - 10/8r + 3/8 = 0 \implies r = 1/2, r = 3/4 \quad (0.25)$$

Nghiệm tổng quát

$$Y_t = 4400 + C_1(1/2)^t + C_2(3/4)^t \quad (0.25)$$

Nếu SV không ghi nghiệm tổng quát mà tìm được  $c_1, c_2$  rồi ghi ra được nghiệm thì cho điểm ở công thức nghiệm cuối.)

Vì  $Y_0 = 400, Y_1 = 300$  suy ra

$$400 = 4400 + c_1 + c_2$$

$$300 = 4400 + 1/2c_1 + 3/4c_2$$

Ta được  $c_1 = 4400, c_2 = -8400$  (0.25)

Vậy

$$Y_t = 4400 + 4400(1/2)^t - 8400(3/4)^t$$

b. Vì  $|r_1| < 1, |r_2| < 1$  nên phương trình sai phân ổn định. (0.25)